Seconda esercitazione - 11/12/2018

Compito d'esame di MECCANICA QUANTISTICA

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 1, che si muove in uno spazio limitato da due superfici piane ortogonali all'asse z e poste in $z = \pm a/2$, in modo tale che la sua coordinata z soddisfi la condizione $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$. L'Hamiltoniana del sistema è

$$\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha(L_z + 2S_z),$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare, e vale la condizione $0 < \hbar\alpha \ll \hbar\omega \ll \hbar^2/(ma^2)$.

1) Si determinino gli autostati di $\mathcal{H}$ con energie $E < \pi^2\hbar^2/(2ma^2) + 5\hbar\omega/2 \equiv E_{\max}$ e si calcolino i valori delle rispettive energie e le degenerazioni dei livelli.

2) Si determini lo stato più generale $|\psi\rangle$ tale che: (a) una misura dell'energia dia con certezza $E < E_{\max}$; (b) una misura di J_z dia con certezza il valore $\hbar$, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$; (c) la probabilità di misurare $S_z = \hbar$ sia 1/2; (d) valga la condizione $\langle\psi|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}|\psi\rangle = 0$.

3) Si calcoli ${}_t\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle_t$, dove $|\psi\rangle_t$ è l'evoluto temporale di $|\psi\rangle_{t=0} = |\psi\rangle$.

Soluzione dell'esercizio 1. Riscriviamo l'hamiltoniana nella forma

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right] + \alpha\left(L_z + 2S_z\right),$$

in cui riconosciamo che il primo termine $p_z^2/(2m)$ descrive la dinamica di una particella nel segmento lungo l'asse z a pareti infinite in $\pm a/2$ e il termine in parentesi quadra descrive la dinamica di un oscillatore armonico bidimensionale sul piano x, y. Gli autovalori $E(n_z, n, \ell_z, s_z)$ del sistema sono dati pertanto dalla somma

$$E(n_z, n, \ell_z, s_z) = \frac{\hbar^2\pi^2 n_z^2}{2ma^2} + \hbar\omega\,(n+1) + \hbar\alpha\,(\ell_z + 2s_z)$$

e le autofunzioni sono date dal prodotto tensoriale $|\psi\rangle = |n_z\rangle|\psi_{n,\ell_z}\rangle|s, s_z\rangle$, dove i ket $|\psi_{n,\ell_z}\rangle$ denotano gli autostati simultanei dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico bidimensionale e dell'operatore L_z, con $n = n_1 + n_2$. Poiché per $n_z = 2, n = 0$ (da cui segue $\ell_z = 0$) e $s_z = -1$ si ha

$$\left(\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha\right) - E_{\max} = \left(\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha\right) - \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{5}{2}\hbar\omega\right) =$$

$$= \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2} - \frac{3}{2}\hbar\omega - 2\hbar\alpha = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} - \hbar\omega - \frac{4}{3}\hbar\alpha\right) > 0,$$

in quanto $\hbar^2/(ma^2) \gg \hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$, segue che gli autostati di H richiesti hanno numero quantico $n_z = 1$ relativamente all'hamiltoniana della particella nel segmento con pareti infinite lungo l'asse z.

1) In ordine di energie crescenti, gli autostati di H con energia $E < E_{\max}$ sono

$$|\Psi_0\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,-1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_1\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,0\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_2\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_3\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,-1\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_3 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - 3\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_4^{(a)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,0\rangle, \qquad |\Psi_4^{(b)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,-1\rangle,$$

$$\text{di energia} \quad E_4 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - \hbar\alpha \quad \text{e con degenerazione 2;}$$

$$|\Psi_5^{(a)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,1\rangle, \qquad |\Psi_5^{(b)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle,$$

$$\text{di energia} \quad E_5 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + \hbar\alpha \quad \text{e con degenerazione 2;}$$

$$|\Psi_6\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_6 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + 3\hbar\alpha \quad \text{e non degenere.}$$

Osserviamo infine che risulta $E_3 > E_2$ perché per la condizione $\hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$ vale la disuguaglianza

$$E_3 - E_2 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - 3\hbar\alpha\right) - \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha\right) = \hbar\omega - 5\hbar\alpha > 0.$$

2) Lo stato più generale $|\psi\rangle$ che verifichi la condizione (a) è una combinazione lineare degli autostati di H di cui al punto precedente; dalla condizione (b) segue che lo stato $|\psi\rangle$ è combinazione lineare dei soli due autostati $|\Psi_2\rangle$ e $|\Psi_5^{(b)}\rangle$; dalla condizione (c) segue che lo stato $|\psi\rangle$ è dato da

$$|\psi\rangle = |1\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle + \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\,|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle\right].$$

Per imporre la condizione (d) scriviamo gli autostati dell'hamiltoniana H_O dell'oscillatore armonico bidimensionale nella forma $|n_x, n_y\rangle$ e abbiamo l'uguaglianza $|\psi_{0,0}\rangle = |0,0\rangle$.

Poiché gli autostati $|\psi_{1,\pm1}\rangle$ simultanei degli operatori H_O, L_z sono combinazione lineare degli autostati $|1,0\rangle = Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}$ e $|0,1\rangle = Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}$, calcoliamo

$$L_z|1,0\rangle = i\hbar\left(y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y}\right) Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} = i\hbar\left[Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}\right] = i\hbar|0,1\rangle,$$

$$L_z|0,1\rangle = i\hbar\left(y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y}\right) Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} = -i\hbar\left[Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}\right] = -i\hbar|1,0\rangle,$$

da cui seguono la rappresentazione matriciale di L_z nella base $\{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e i suoi autovettori $|\psi_{1,\pm1}\rangle = (i|1,0\rangle \mp |0,1\rangle)/\sqrt{2}$, relativi agli autovalori $\ell_z = \pm\hbar$.

Poiché risulta

$$\langle\psi_{0,0}|x|\psi_{1,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle 0,0|x\,(i|1,0\rangle - |0,1\rangle) = i\sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega}}\;{}_x\langle 0|(a+a^\dagger)_x|1\rangle_x = i\sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega}}\,,$$

$$\langle 1,1|S_x|1,0\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 1,1|\left(S_+ + S_-\right)|1,0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,\langle 1,1|\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,,$$

segue

$$\langle\psi|xS_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle 1,1|\langle\psi_{0,0}| + e^{-i\alpha}\,\langle 1,0|\langle\psi_{1,1}|\right] xS_x \left[|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle + e^{i\alpha}\,|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i\alpha}\langle\psi_{0,0}|x|\psi_{1,1}\rangle\,\langle 1,1|S_x|1,0\rangle + e^{-i\alpha}\langle\psi_{1,1}|x|\psi_{0,0}\rangle\,\langle 1,0|S_x|1,1\rangle\right] = -\sqrt{\frac{\hbar^3}{8m\omega}}\,\sin\alpha$$

e dalle relazioni

$$\langle\psi|zS_z|\psi\rangle = A\langle 1|z|1\rangle = A\int_{-a/2}^{a/2} z\cos^2 kz\,dz = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle\psi|xS_x|\psi\rangle = \langle\psi|yS_y|\psi\rangle,$$

otteniamo infine $\langle\psi|(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S})|\psi\rangle = 0$ per $\alpha = 0, \pi$. Pertanto lo stato $|\psi\rangle$ assume le due forme possibili, indicate con $|\psi^{(\pm)}\rangle$, compatibili con le condizioni assegnate

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |1\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle\right].$$

3) Poiché il valor medio dell'hamiltoniana su un qualsiasi stato risulta indipendente dal tempo, segue $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle$, da cui otteniamo (per entrambi gli stati $|\psi^{(\pm)}\rangle$)

$$\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + \hbar\alpha\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{3}{2}\,\hbar\omega + \frac{3}{2}\,\hbar\alpha.$$