SAPIENZA UNIVERSITY OF ROME - ITALY

Department of

METHODS AND MODELS FOR THE TERRITORY, ECONOMICS, AND FINANCE

Lecture Notes

Mathematics for Finance

Stefano PATRI'

November, 2022

Contents

1
Argomenti di algebra lineare

Chiamiamo *vettore* un elemento di uno *spazio vettoriale* e gli *spazi vettoriali* che consideriamo sono gli spazi S_n, definiti nel testo di riferimento, i cui elementi sono i vettori $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$ aventi n componenti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo che con i *vettori* di uno *spazio vettoriale* S_n si possono eseguire le due *operazioni fondamentali* definite, per ogni coppia di *vettori* ad n componenti

$$v_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

e per ogni numero reale λ (λ è la lettera, chiamata *lambda*, dell'alfabeto greco), tramite le due uguaglianze, denominate rispettivamente *addizione di due vettori* e *moltiplicazione di un vettore per un numero*

$$v_1 + v_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n),$$
$$kv_1 = k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n).$$

Dati k *vettori* $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ del medesimo *spazio vettoriale* S_n e k numeri reali indicati con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ (α è la lettera, chiamata *alfa*, dell'alfabeto greco), l'operazione che consiste nella sequenza delle due operazioni dello *spazio vettoriale*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k \tag{1.1a}$$

si chiama *combinazione lineare* dei k *vettori* dati mediante i k *coefficienti* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ e denoteremo sempre i *vettori* con un simbolo in "grassetto" mentre i singoli numeri reali, come ad esempio i *coefficienti* dei *vettori*, con un simbolo senza "grassetto".

Il vettore w che si ottiene come risultato della combinazione lineare (1.1a), ovvero

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k, \tag{1.1b}$$

viene chiamato *vettore linearmente dipendente* dai k vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ oppure anche *vettore generato* dai k vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$. Viceversa, quando abbiamo un'uguaglianza della forma (1.1b), diciamo che i *vettori* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ *generano il vettore* w.

Se chiamiamo *vettore nullo* di S_n il vettore indicato con 0 e avente componenti

$$0 = (\overbrace{0, 0, 0, \ldots, 0, 0}^{n \text{ zeri}}),$$

è immediato rendersi conto che risulta $0 + 0 = 0, k0 = 0$ e $0v = 0$, da cui segue che il *vettore nullo* è l'*elemento neutro* dell'operazione di *addizione* di due vettori e che il risultato della combinazione lineare (1.1a) in cui i coefficienti siano tutti zeri, è sempre, in virtù di come sono definite le due *operazioni fondamentali* sui vettori, "banalmente" il *vettore nullo*, ovvero per ogni insieme di k vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ vale sempre l'uguaglianza

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_{k-1} + 0v_k = 0 \tag{1.2}$$

e la combinazione lineare che *genera il vettore nullo* con coefficienti tutti nulli al primo membro della (1.2) viene chiamata *combinazione lineare banale*.

1.1 Insiemi di vettori e loro proprietà

Quella che vogliamo ora studiare è la proprietà di un dato insieme di k vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale S_n rispetto all'uguaglianza

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0,$$

la quale, per $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$, assume la forma (1.2) e per illustrare "meglio" il significato del nostro studio, analizziamo i seguenti esempi.

Se consideriamo l'insieme dei due vettori

$$\mathcal{I}_1 = \{u_1 = (1, 2, -1)\,,\ u_2 = (3, 1, -2)\,,\ u_3 = (-7, 1, 4)\} \tag{1.3a}$$

appartenenti allo spazio vettoriale S_3, abbiamo che i vettori dell'insieme $\mathcal{I}_1$ *generano* il *vettore nullo* non solo ovviamente con i coefficienti tutti nulli, come nell'uguaglianza (1.2), ovvero $0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0$, ma anche con altre scelte dei coefficienti non tutti nulli, ovvero

$$\begin{aligned}
&2u_1 + (-3)u_2 + (-1)u_3 = 2(1, 2, -1) + (-3)(3, 1, -2) + (-1)(-7, 1, 4) = (0, 0, 0) = 0,\\
&4u_1 + (-6)u_2 + (-2)u_3 = 0,\\
&6u_1 + (-9)u_2 + (-3)u_3 = 0
\end{aligned}$$

e così via con infinite scelte dei coefficienti che quindi non sono tutti nulli.

Se quindi scriviamo un'uguaglianza $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non tutti nulli, quale ad esempio l'equazione $2u_1 + (-3)u_2 + (-1)u_3 = 0$, otteniamo infine le tre relazioni

$$u_1 = \frac{3}{2}\,u_2 + \frac{1}{2}\,u_3\,, \qquad u_2 = \frac{2}{3}\,u_1 - \frac{1}{3}\,u_3\,, \qquad u_3 = 2u_1 + (-3)u_2\,,$$

il cui importante significato è che ogni vettore che nell'equazione $2u_1 + (-3)u_2 + (-1)u_3 = 0$ abbia avente coefficiente diverso da zero, può essere scritto (esplicitato al primo membro) come *combinazione lineare* dei rimanenti due vettori ("trasferiti" al secondo membro).

Se invece consideriamo l'insieme dei due vettori dello spazio vettoriale S_2

$$\mathcal{I}_2 = \{v_1 = (1,1)\,,\, v_2 = (2,3)\}, \tag{1.3b}$$

abbiamo, senza "preoccuparci" della dimostrazione, che i vettori dell'insieme $\mathcal{I}_2$ *generano* il *vettore nullo* solo mediante i coefficienti tutti nulli, ovvero solo tramite la combinazione lineare della forma (1.2) con *coefficienti banali* tutti nulli $0v_1 + 0v_2 = 0$.

Poiché dunque l'insieme dei vettori $\mathcal{I}_2$ *genera il vettore nullo* solo con i *coefficienti banali*, ovvero con coefficienti tutti nulli, segue quindi che dalla relazione $0v_1 + 0v_2 = 0$, che *genera* il *vettore nullo*, non è possibile esplicitare nessun vettore, scritto al primo membro, come combinazione lineare dell'altro vettore scritto al secondo membro, perché se a partire dall'uguaglianza $0v_1 + 0v_2 = 0$ si "lascia" un vettore con il proprio coefficiente nullo al primo membro e si "trasferisce" l'altro al secondo membro, non è possibile dividere ambo i membri per il coefficiente nullo del vettore scritto al primo membro.

1.1.1 Insieme di vettori linearmente dipendente

Per estendere e generalizzare le proprietà che abbiamo illustrato relativamente agli insiemi di vettori $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ nelle (1.3), consideriamo un certo spazio vettoriale S_n dal quale estraiamo un insieme $\mathcal{I}$ contenente k vettori, ovvero

$$\mathcal{I} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k\}, \tag{1.4}$$

con $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k \in S_n$, ed enunciamo le due seguenti *proposizioni*

P_1: *"esiste una combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo"*,

P_2: *"almeno un vettore dell'insieme $\mathcal{I}$ è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti $k-1$ vettori"*.

Una combinazione lineare di vettori in cui almeno un vettore abbia coefficiente diverso da zero, viene chiamata *combinazione lineare non banale*.

Dopo aver osservato "facilmente" che l'insieme dei vettori $\mathcal{I}_1$ in (1.3a) rende vere entrambe le proposizioni P_1 e P_2, mentre l'insieme dei vettori $\mathcal{I}_2$ in (1.3b) le rende false entrambe, dimostriamo l'equivalenza delle due proposizioni P_1 e P_2.

Dimostrare che le due proposizioni P_1 e P_2 sono equivalenti significa dimostrare che se una delle due proposizioni è valida, segue che è valida anche l'altra.

Se la proposizione P_1 è valida, segue che anche la proposizione P_2 è valida, ovvero simbolicamente abbiamo $P_1 \Longrightarrow P_2$.

Dimostrazione. Per dimostrare $P_1 \Longrightarrow P_2$ esplicitiamo l'ipotesi P_1, ovvero, poiché esiste una combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ in (1.4) con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ non tutti nulli che dà come risultato il *vettore nullo*, scriviamo l'uguaglianza

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0, \tag{1.5}$$

in cui supponiamo, senza perdita di generalità, che il coefficiente diverso da zero sia, ad esempio, il coefficiente α_2. Se ora riscriviamo l'uguaglianza (1.5) nella forma in cui il vettore v_2 con coefficiente diverso da zero α_2 sta "da solo" al primo membro, otteniamo

$$\alpha_2 v_2 = -\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 - \cdots - \alpha_{k-1} v_{k-1} - \alpha_k v_k,$$

da cui, poiché α_2 è diverso da zero, segue la relazione finale

$$v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} v_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_2} v_4 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_2} v_{k-1} - \frac{\alpha_k}{\alpha_2} v_k\,,$$

che mostra che l'insieme $\mathcal{I}$ soddisfa la proposizione P_2. *C.d.d*

Se la proposizione P_2 è valida, segue che anche la proposizione P_1 è valida, ovvero simbolicamente abbiamo $P_2 \Longrightarrow P_1$.

Dimostrazione. Per dimostrare $P_2 \implies P_1$ esplicitiamo l'ipotesi P_2, ovvero che almeno un vettore dell'insieme $\mathcal{I}$ in (1.4) sia esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti $k-1$ vettori dell'insieme. Supponiamo, senza perdita di generalità, che il vettore esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori sia, ad esempio, il vettore v_3 e scriviamo dunque, appunto per ipotesi, la relazione

$$v_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_4 v_4 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \,.$$

Se a questo punto "portiamo" tutti i vettori al primo membro, otteniamo l'uguaglianza

$$-\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 + v_3 - \beta_4 v_4 - \cdots - \beta_{k-1} v_{k-1} - \beta_k v_k = 0 \tag{1.6}$$

che mostra che l'insieme $\mathcal{I}$ soddisfa la proposizione P_1 perché, sebbene non vi siano informazioni relative ai coefficienti β, se siano nulli oppure non nulli, tuttavia il coefficiente del vettore v_3, come si riconosce, è uguale ad 1, ovvero esiste una combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ in (1.4) con coefficienti non tutti nulli, appunto la combinazione lineare al primo membro nella (1.6) in cui il coefficiente di v_3 è diverso da zero, che dà come risultato il *vettore nullo* al secondo membro della (1.6). *C.d.d.*

In base a quanto discusso nel capitolo **??** sulla logica delle proposizioni, i due teoremi distinti 1.1.1, rappresentato anche con il simbolo $P_1 \implies P_2$, e 1.1.1, rappresentato anche con il simbolo $P_2 \implies P_1$, possono essere rappresentati dall'unico simbolo $P_1 \iff P_2$ e possono essere enunciati tramite le seguenti due formulazioni unificate.

Prima formulazione del teorema $P_1 \iff P_2$. *Dato un insieme di vettori, esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo se e solo se almeno uno dei vettori dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme.*

oppure, se invertiamo le proposizioni

Prima formulazione del teorema $P_1 \iff P_2$. *Dato un insieme di vettori, almeno uno di essi è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme se e solo se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo.*

Come abbiamo spiegato nel capitolo sulla logica delle proposizioni, definire un concetto significa attribuire un nome agli elementi appartenenti all'*insieme di validità* di una proposizione. Possiamo introdurre dunque la seguente

Se un insieme $\mathcal{I}$ di vettori soddisfa una delle due proposizioni P_1, P_2, e quindi, in virtù dei due teoremi 1.1.1 e 1.1.1 che abbiamo dimostrato, di conseguenza anche l'altra, l'insieme $\mathcal{I}$ viene chiamato "insieme linearmente dipendente".

Come si riconosce, la *definizione* 1.1.1 di insieme *linearmente dipendente* è stata introdotta dopo la discussione dei due teoremi 1.1.1 e 1.1.1 ed è stata attribuita a quegli insiemi che rendono vere simultaneamente le due proposizioni P_1, P_2.

Generalmente, però, nei testi che trattano l'Algebra Lineare la *definizione* 1.1.1 di insieme *linearmente dipendente* viene attribuita inizialmente a quegli insiemi che rendono vera solo una delle due proposizioni P_1 oppure P_2. Supponiamo che la *definizione* di insieme *linearmente dipendente* sia introdotta mediante la validità della proposizione P_1, ovvero supponiamo di scrivere

Prima *definizione alternativa* di insieme *linearmente dipendente*. *Un insieme di vettori viene chiamato "linearmente dipendente" se rende vera la proposizione P_1.*

A partire da questa definizione, il teorema 1.1.1 può essere riscritto con la formulazione

Prima nuova formulazione del teorema 1.1.1. *Se un insieme di vettori è "linearmente dipendente", segue che almeno un vettore dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme.*

Il teorema 1.1.1 può essere riscritto con la formulazione

Prima nuova formulazione del teorema 1.1.1. *Se almeno un vettore di un insieme di vettori è esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme, segue che l'insieme di vettori è "linearmente dipendente".*

Tali prime nuove formulazioni dei teoremi 1.1.1 e 1.1.1 possono quindi essere unificate nell'unica formulazione

Teorema. *Un insieme di vettori è "linearmente dipendente" se e solo se almeno un vettore dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme.*

Supponiamo ora invece che la *definizione* di insieme *linearmente dipendente* sia introdotta mediante la validità della proposizione P_2, ovvero supponiamo di scrivere

Seconda *definizione alternativa* di insieme *linearmente dipendente*. *Un insieme di vettori è chiamato "linearmente dipendente" se rende vera la proposizione P_2.*

A partire da questa definizione, il teorema 1.1.1 può essere riscritto con la formulazione

Seconda nuova formulazione del teorema 1.1.1. *Dato un insieme di vettori, se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo, segue che l'insieme di vettori è "linearmente dipendente".*

Il teorema 1.1.1 può essere riscritto con la formulazione

Seconda nuova formulazione del teorema 1.1.1. *Se un insieme di vettori è "linearmente dipendente", segue che esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo.*

Tali seconde nuove formulazioni dei teoremi 1.1.1 e 1.1.1 possono quindi essere unificate nell'unica formulazione

Teorema. *Un insieme di vettori è "linearmente dipendente" se e solo se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il vettore nullo.*

E′ molto importante sottolineare quindi che per evitare confusioni su tutta questa terminologia e su tutte queste formulazioni, è fondamentale distinguere le *definizioni* dai *teoremi* e puntualizzare all'inizio la scelta della formulazione della *definizione*, da cui discende poi la corrispondente formulazione dei *teoremi* in cui debbono essere riconosciute e distinte la proposizione *ipotesi* e la proposizione *tesi*.

La denominazione *linearmente dipendente* attribuita ad un insieme di vettori che soddisfa le due proposizioni P_1, P_2 deriva, in particolare, dalla proprietà contenuta nella proposizione P_2 secondo la quale un vettore esprimibile come combinazione lineare di altri vettori viene chiamato *vettore linearmente dipendente* da quelli di cui esso è appunto combinazione lineare. Quindi un insieme di vettori viene chiamato *linearmente dipendente*, come dichiarato nella *definizione 1.1.1*, se anche solo un vettore di tale insieme risulta esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori dell'insieme, ovvero se anche solo un vettore dell'insieme di vettori risulta *linearmente dipendente* dagli altri rimanenti vettori dell'insieme. E′ importante sottolineare quindi che se un insieme di vettori è *linearmente dipendente*, questo non significa che tutti i vettori dell'insieme siano *linearmente dipendenti* dai rimanenti vettori dell'insieme, ovvero, in altre parole, un insieme di vettori può essere *linearmente dipendente* anche se qualche vettore dell'insieme non fosse *linearmente dipendente* dagli altri vettori dell'insieme, come mostra il seguente esempio. Se consideriamo l'insieme $\mathcal{I}$ dei tre vettori

$$\mathcal{I} = \{v_1 = (2,3), \quad v_2 = (4,6), \quad v_3 = (1,-1)\}, \tag{1.7}$$

abbiamo che il vettore v_1 è combinazione lineare dei due rimanenti vettori v_2, v_3, ovvero v_1 è *linearmente dipendente* dai vettori v_2, v_3, perché risulta

$$v_1 = \frac{1}{2}\, v_2 + 0v_3\,; \tag{1.8a}$$

il vettore v_2 è *linearmente dipendente* dai vettori v_1, v_3, perché risulta

$$v_2 = 2v_1 + 0v_3\,, \tag{1.8b}$$

ma il vettore v_3 non è *linearmente dipendente* dai vettori v_1, v_2 perché nessuna combinazione lineare dei due vettori v_1, v_2 può dare come risultato il vettore v_3.

Tuttavia l'insieme $\mathcal{I}$ dei tre vettori $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è *linearmente dipendente* perché in effetti almeno un vettore dell'insieme $\mathcal{I}$ è combinazione lineare degli altri due, come mostrano in particolare le due combinazioni lineari (1.8) relative ai vettori v_1 e v_2.

In ogni caso non è sorprendente che il vettore v_3 dell'insieme pur *linearmente dipendente* $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, v_3\}$ non sia esprimibile come combinazione lineare degli altri due vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ perché in tutte le infinite combinazioni lineari dei tre vettori con coefficienti non tutti nulli che dànno il *vettore nullo* come risultato, il vettore v_3 ha sempre coefficiente zero. Alcune di tali combinazioni lineari dei tre vettori con coefficienti non tutti nulli che dànno come risultato il *vettore nullo* sono

$$2v_1 + (-1)v_2 + 0v_3 = 0, \qquad 4v_1 + (-2)v_2 + 0v_3 = 0, \qquad 6v_1 + (-3)v_2 + 0v_3 = 0$$

e così via, e poiché, come già sappiamo, da tali equazioni possono essere esplicitati solo i vettori che hanno coefficiente diverso da zero, segue che il vettore v_3 non può essere combinazione lineare dei due vettori v_1, v_2 perché v_3 ha appunto sempre coefficiente nullo.

Infine vogliamo studiare cosa accade quando i vettori di un insieme *linearmente dipendente* dànno come risultato un vettore diverso dal *vettore nullo*.

Se consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3 dell'insieme *linearmente dipendente* (1.7), abbiamo che essi *generano* tra gli altri, ad esempio, il vettore $w = (6, 9)$ con infinite scelte dei coefficienti attribuibili ai tre vettori, perché risulta

$$w = 3v_1 + 0v_2 + 0v_3\,, \qquad w = 1v_1 + 1v_2 + 0v_3\,, \qquad w = 2v_1 + \frac{1}{2}\,v_2 + 0v_3$$

e così via. Enunciamo quindi il seguente teorema che possiamo chiamare *teorema dei vettori linearmente dipendenti*.

(**Teorema dei vettori linearmente dipendenti**) Se un insieme di vettori $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k\}$ è *linearmente dipendente* e risulta

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k, \tag{1.9}$$

segue che i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ della combinazione lineare non sono unici, ovvero i vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ *generano* il vettore w in infiniti modi.

Dimostrazione. Poiché per ipotesi l'insieme $\mathcal{I}$ è *linearmente dipendente*, segue che essi soddisfano la proposizione P_1, ovvero esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il *vettore nullo* e quindi possiamo scrivere

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k = 0, \tag{1.10}$$

dove almeno un coefficiente β_i è appunto diverso da zero. Se adesso ricordiamo che il *vettore nullo* è l'elemento neutro dell'addizione di vettori e sostituiamo il primo membro della (1.10) al posto del *vettore nullo*, otteniamo

$$\begin{aligned} w = w + 0 &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_k v_k) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + (\alpha_3 + \beta_3) v_3 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k) v_k\,, \end{aligned}$$

ovvero, se mettiamo in evidenza i vettori, otteniamo la relazione

$$w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + (\alpha_3 + \beta_3) v_3 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k) v_k\,, \tag{1.11}$$

che mostra che il vettore w, espresso per ipotesi tramite la combinazione lineare (1.9), può essere espresso anche tramite la seconda combinazione lineare (1.11) in cui il coefficiente di almeno un vettore al secondo membro è diverso dal coefficiente del corrispondente vettore al secondo membro nella combinazione lineare (1.9) perché almeno un coefficiente β_i nella (1.10) è diverso da zero e quindi almeno un coeffciente $\alpha_i + \beta_i$ è diverso da α_i. *C.d.d.*

Poiché un insieme di vettori si dice *linearmente dipendente* se i vettori dell'insieme *generano* il *vettore nullo* con infinite scelte dei coefficienti, possiamo esprimere il significato del teorema 1.1.1 dicendo dunque che se i vettori di un insieme *generano* il *vettore nullo* con infinite scelte dei coefficienti, segue che essi *generano* con infinite scelte dei coefficienti anche qualsiasi altro vettore che essi possono *generare*.

1.1.2 Insieme di vettori linearmente indipendente

Se indichiamo con $\overline{P}_1$ la proposizione contraria della P_1 e con $\overline{P}_2$ la proposizione contraria della P_2, dove le proposizioni P_1, P_2 sono quelle introdotte all'inizio del par. 1.1.1, abbiamo, per quanto discusso sulla logica delle proposizioni, che il teorema $P_1 \Longrightarrow P_2$ è equivalente al teorema $\overline{P}_2 \Longrightarrow \overline{P}_1$ e che il teorema $P_2 \Longrightarrow P_1$ risulta equivalente al teorema $\overline{P}_1 \Longrightarrow \overline{P}_2$. Se, per evitare la *barra* sopra le lettere, denotiamo la proposizione $\overline{P}_1$ con Q_1 e la proposizione $\overline{P}_2$ con Q_2, le due proposizioni $\overline{P}_1 \equiv Q_1$ e $\overline{P}_2 \equiv Q_2$ sono

- $Q_1 \equiv \overline{P}_1$: *"l'unica combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\mathcal{I}$ che dà come risultato il vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli"*;

- $Q_2 \equiv \overline{P}_2$: *"nessun vettore dell'insieme $\mathcal{I}$ è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti $k-1$ vettori"*.

A questo punto la formulazione del teorema $\overline{P}_1 \Longrightarrow \overline{P}_2$ (scrivibile come $Q_1 \Longrightarrow Q_2$) è

Se l'unica combinazione lineare dei vettori di un insieme che dà come risultato il vettore nullo è la "combinazione lineare banale", ovvero quella con coefficienti tutti nulli, segue che nessun vettore dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme.

Tale teorema, rappresentato mediante il simbolo $\overline{P}_1 \Longrightarrow \overline{P}_2$, risulta già dimostrato perché esso è equivalente, per la logica delle proposizioni, al teorema $P_2 \Longrightarrow P_1$, appunto dimostrato nel paragrafo precedente.

La formulazione del teorema $\overline{P}_2 \Longrightarrow \overline{P}_1$ (scrivibile come $Q_2 \Longrightarrow Q_1$) è

Se nessun vettore di un insieme di vettori è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme, segue che l'unica combinazione lineare dei vettori dell'insieme che dà come risultato il vettore nullo è la "combinazione lineare banale", ovvero quella con coefficienti tutti nulli.

Tale teorema, rappresentato mediante il simbolo $\overline{P}_2 \implies \overline{P}_1$, risulta già dimostrato perché esso è equivalente, per la logica delle proposizioni, al teorema $P_1 \implies P_2$, appunto dimostrato nel paragrafo precedente.

I due teoremi 1.1.2 e 1.1.2 mostrano dunque che le due proposizioni Q_1, Q_2 risultano equivalenti e tale equivalenza non è sorprendente perché corrisponde ovviamente all'equivalenza delle due proposizioni P_1, P_2 delle quali Q_1, Q_2 sono rispettivamente le contrarie. Possiamo pertanto rappresentare i due teoremi con l'usuale simbolo $Q_1 \iff Q_2$ oppure con $Q_2 \iff Q_1$ e riformulare i due teoremi 1.1.2 e 1.1.2 in forma unificata tramite i due seguenti enunciati.

Teorema $Q_1 \iff Q_2$. *Dato un insieme di vettori, l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è la "combinazione lineare banale", ovvero quella con coefficienti tutti nulli, se e solo se nessun vettore dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme.*

Teorema $Q_2 \iff Q_1$. *Dato un insieme di vettori, nessun vettore dell'insieme è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è la "combinazione lineare banale", ovvero quella con coefficienti tutti nulli.*

Possiamo a questo punto introdurre la seguente

Se un insieme $\mathcal{I}$ di vettori soddisfa una delle due proposizioni Q_1, Q_2, e quindi, in virtù dei due teoremi $Q_1 \implies Q_2$ e $Q_2 \implies Q_1$, di conseguenza anche l'altra, l'insieme $\mathcal{I}$ viene chiamato "insieme linearmente indipendente".

Se, come abbiamo svolto per un insieme di vettori *linearmente dipendente*, enunciamo la *definizione* di insieme di vettori *linearmente indipendente* riferendola alla validità della sola proposizione Q_1 oppure alla validità della sola proposizione Q_2, possiamo enunciare anche i teoremi 1.1.2 e 1.1.2 in forma diversa, scrivendo la *definizione* di insieme di vettori *linearmente indipendente* al posto della proprietà a cui si è scelto di attribuire tale *definizione*.

Possiamo dimostrare quindi il seguente teorema sulla combinazione lineare di vettori appartenenti ad un insieme linearmente indipendente.

(**Teorema dei vettori linearmente indipendenti**) Se un insieme di vettori $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k\}$ è *linearmente indipendente* e risulta

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k, \tag{1.12}$$

segue che i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ della combinazione lineare sono unici.

Dimostriamo tale teorema *per assurdo*, ovvero dimostriamo la sua formulazione equivalente che, in base a quanto illustrato nel capitolo sulla logica delle proposizioni, si ottiene scrivendo il *contrario della tesi* come *ipotesi* e il *contrario dell'ipotesi* come *tesi*.

L'enunciato equivalente del teorema 1.1.2 è dunque

Enunciato equivalente del teorema 1.1.2. *Se i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ della combinazione lineare al secondo membro nella relazione*

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k$$

non sono unici, segue che i vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ risultano "linearmente dipendenti".

Dimostrazione. L'esplicitazione dell'*ipotesi* è che vi sono due combinazioni lineari distinte (ovvero con coefficienti non unici) che dà il vettore w come risultato.

Da tale ipotesi segue che se scriviamo dunque il vettore w tramite due distinte combinazioni lineari

$$\begin{cases} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k \\ v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \,, \end{cases}$$

in cui appunto almeno un coefficiente β_i sia distinto dal corrispondente coefficiente α_i, otteniamo, sottraendo membro a membro, l'uguaglianza

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + (\alpha_3 - \beta_3) v_3 + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}) v_{k-1} + (\alpha_k - \beta_k) v_k = 0 \quad (1.13)$$

in cui almeno un coefficiente $\alpha_i - \beta_i$ risulta diverso da zero.

A questo punto osserviamo che la relazione (1.13) ha al primo membro una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ con coefficienti non tutti nulli che dà come risultato il *vettore nullo* al secondo membro e quindi concludiamo che l'insieme dei vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ risulta *linearmente dipendente*, ovvero vale la *tesi. C.d.d.*

Poiché un insieme di vettori si dice *linearmente indipendente* se i vettori dell'insieme *generano* il *vettore nullo* solo con coefficienti tutti nulli, ovvero in modo unico, possiamo esprimere il significato del teorema 1.1.2 dicendo dunque che se i vettori di un insieme *generano* il *vettore nullo* unicamente con coefficienti tutti nulli, segue che essi *generano* con coefficienti unici anche qualsiasi altro vettore che essi possono *generare*.