FUNZIONI SCALARI DI PIU' VARIABILI

Stefano Patrì
seriegeo@yahoo.it

Marzo 2008

1 Introduzione

In questa nota analizzeremo le proprietà delle funzioni scalari

$$f : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R} \tag{1}$$

e in particolare discuteremo il comportamento che le funzioni di due variabili ($n = 2$) hanno in relazione ai concetti di *continuità* e *derivabilità* e le procedure per determinare gli estremi liberi e vincolati delle funzioni di tre variabili ($n = 3$).

1.1 Coordinate polari

Poiché, come vedremo, attraverso un cambiamento di variabili sarà sempre possibile condurre lo studio intorno al punto origine degli assi cartesiani $O(0, 0)$, illustreremo brevemente l'uso delle coordinate polari definite appunto intorno a tale punto.

Dato un punto P sul piano cartesiano, ad esso si può associare, come noto, una coppia di numeri reali. Se dal punto P si conducono le parallele agli assi stessi e si considerano i valori (ascisse e ordinate) che si vengono a determinare sugli assi, allora chiameremo la coppia così ottenuta *coppia di coordinate cartesiane* o semplicemente *coordinate cartesiane*.

Questo non è però l'unico modo di associare al punto P una coppia; possiamo individuare il punto P anche attraverso quelle che appunto si chiamano *coordinate polari*, date da due numeri associati al punto P mediante il seguente procedimento.

Considerato il segmento OP che congiunge l'origine al punto P, chiamiamo r la sua lunghezza e α l'angolo che tale segmento forma con l'orientazione positiva dell'asse x. Se limitiamo la variabilità dell'angolo all'intervallo $[0, 360°]$ (ovvero $[0, 2\pi]$ come si dice in Analisi Matematica), si ha che al punto P risulta associata un'unica coppia (r, α) e che a tale coppia risulta associato soltanto il punto P, come è facile constatare. Poiché dunque l'associazione fra i punti P e le coppie (r, α) è biunivoca, allora possiamo dire che le coppie (r, α) formano un altro sistema di coordinate mediante il quale individuare e rappresentare i punti.

In figura 1 si può vedere qual è la relazione geometrica fra il sistema di coordinate cartesiane (x, y) e il sistema di coordinate polari (r, α) per un generico punto P: in virtù delle semplici relazioni trigonometriche valide per un triangolo rettangolo, abbiamo

$$\begin{cases} x &= r \cos\alpha \\ y &= r \sin\alpha \end{cases} \tag{2}$$

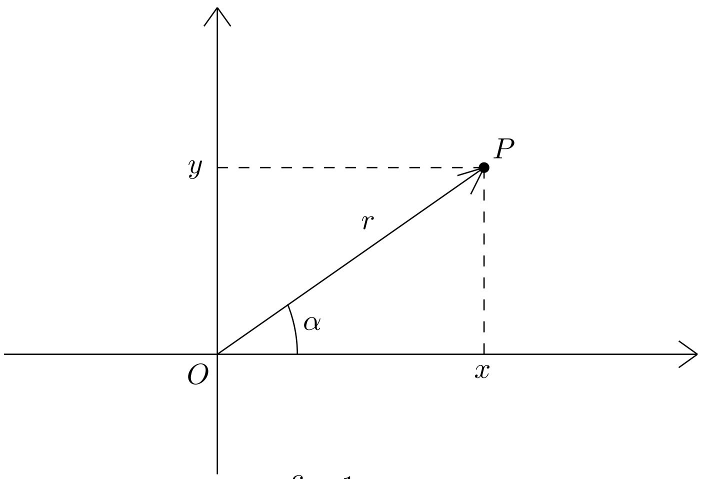


fig. 1

Vedremo in alcuni esempi che rappresentando i punti mediante le loro coordinate polari, si potranno evidenziare meglio alcune proprietà delle funzioni di due variabili.

2 Limiti di funzioni e funzioni continue

Data una funzione reale di due variabili reali

$$f : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}$$

indicata con $f(x, y)$ e dato un punto (x_0, y_0) che sia punto di accumulazione del dominio D della $f(x, y)$, si dice che la funzione f ha limite L per $(x, y) \to (x_0, y_0)$, e si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

se per qualsiasi ε scelto arbitrariamente (che individua un intorno monodimensionale di L), esiste di conseguenza un intorno circolare (bidimensionale) I del punto (x_0, y_0) tutti i punti del quale, escluso al più (x_0, y_0), diano risultati attraverso la f compresi nell'intervallo

$$(L - \varepsilon\,,\; L + \varepsilon)$$

cioè distanti da L meno di ε.

Il contrario di tale definizione è che una funzione non è continua se scelto un valore di ε, tutti gli intorni I di (x_0, y_0) (*grandi* o *piccoli*!) contengono sempre nel loro interno punti che portano a risultati fuori dall'intervallo

$$(L - \varepsilon\,,\; L + \varepsilon)$$

Poiché non sarà riduttivo considerare soltanto limiti per $(x, y) \to (0, 0)$, allora per stabilire se una funzione ammette limite L oppure no, dovremo valutare i risultati che essa fornisce in corrispondenza di punti *vicini* all'origine per vedere se essi appartengono o meno all'intervallo $(L - \varepsilon\,,\; L + \varepsilon)$.

Quando la funzione da studiare possiede quella che possiamo chiamare *una certa simmetria circolare*, allora la valutazione dei risultati che tale funzione fornisce in corrispondenza dei punti *vicini* all'origine risulta più immediata se si utilizza, come vedremo, la rappresentazione polare.

Definizione: una funzione $f(x, y)$ si dice *continua* in un punto $(x_0, y_0) \in D$ se vale

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

2.1 Esempi

Vediamo ora attraverso dei semplici esempi come si discutono i limiti e la continuità delle funzioni di due variabili.

2.1.1 Esempio 1

Data la funzione avente dominio $D = \mathcal{R}\backslash\{(0, 0)\}$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

calcoliamo, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

Poiché il denominatore ha una simmetria circolare, possiamo utilizzare per i punti da attribuire alla funzione e per la funzione stessa la rappresentazione polare data dalle (2) in modo da ottenere allora

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \to \tilde{f}(r, \alpha) = \frac{r^3\,\cos^3\alpha}{r^2\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = r\,\cos^3\alpha$$

dove si è usata la relazione fondamentale della goniometria $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Poiché si ha

$$|\tilde{f}(r,\alpha)| = r|\cos^3\alpha| \leq r \tag{3}$$

segue che la funzione data fornisce come risultato in corrispondenza di un qualsiasi punto diverso da $(0,0)$ un numero minore della distanza del punto stesso considerato dall'origine. Osserviamo che con la rappresentazione polare siamo pervenuti a questa conclusione immediatamente!

Possiamo dimostrare allora che in conseguenza della (3) vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

Scelto infatti un qualsiasi $\varepsilon > 0$, diciamo per esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$, allora abbiamo di conseguenza che tutti i punti del cerchio centrato nell'origine e di raggio pari a $\frac{1}{100}$, tranne $(0,0)$, conducono a risultati distanti da 0 meno di $\varepsilon = \frac{1}{100}$ perché per la (3) ogni punto dà risultato minore della sua distanza dall'origine e tutti i punti di tale cerchio tranne $(0,0)$ hanno allora distanza dall'origine inferiore alla lunghezza del raggio pari a $\frac{1}{100}$.

In questo caso particolare dunque, scelto un qualsiasi $\varepsilon > 0$, il cerchio centrato in $(0,0)$ avente raggio pari a ε è l'intorno di $(0,0)$ tutti i punti del quale, tranne $(0,0)$, dànno risultati distanti meno di ε da 0.

La funzione data comunque non è continua in $(0,0)$ perché non esiste $f(0,0)$ $((0,0) \notin D)$. Possiamo però definire una nuova funzione

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Osserviamo che la $F(x,y)$ e la $f(x,y)$ coincidono in D (dominio della f) e che la $F(x,y)$ è continua perché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 = F(0,0)$$

Concludiamo dicendo che data una funzione $f(x,y)$ non definita (quindi non continua) in $(0,0)$, ma avente in $(0,0)$ limite pari ad un numero, è stato possibile scrivere una nuova funzione $F(x,y)$ coincidente con la $f(x,y)$ nei punti diversi da $(0,0)$ e avente valore in $(0,0)$ pari al limite della f per $(x,y) \to (0,0)$.

2.1.2 Esempio 2

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vogliamo discutere se essa è continua oppure no nel punto $(0,0)$. Per rispondere a tale questione, dobbiamo vedere se vale la definizione di continuità che richiede che valga

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Poiché anche in questo caso il denominatore ha una simmetria circolare, possiamo utilizzare per i punti da attribuire alla funzione e per la funzione stessa la rappresentazione polare data dalle (2) in modo da ottenere dunque

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \to \tilde{f}(r,\alpha) = \frac{r^2\,\cos\alpha\sin\alpha}{r^2\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \cos\alpha\sin\alpha$$

Tale rappresentazione polare ci dice che il risultato fornito dalla funzione in corrispondenza di un punto P qualsiasi dipende esclusivamente dall'angolo che il segmento OP forma con l'orientazione positiva dell'asse x. Tutti i punti appartenenti dunque ad una medesima semiretta uscente dall'origine degli assi cartesiani conducono sempre al medesimo risultato: ad esempio tutti i punti della bisettrice del primo quadrante forniscono risultato pari a $\dfrac{1}{2}$.

Se scegliamo allora il valore $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, non può esistere nessun intorno di $(0,0)$ tutti i punti del quale, tranne al più $(0,0)$ stesso, diano risultato distante da 0 meno di $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ perché i punti della bisettrice del primo quadrante *entrano dentro* (sono presenti in) qualsiasi intorno di $(0,0)$ e tali punti dànno sempre risultato $\dfrac{1}{2} \notin \left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$.

Poiché i punti di una semiretta uscente dall'origine dànno tutti il medesimo risultato e al variare della semiretta questo risultato varia, allora possiamo concludere che la funzione

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ e che quindi la funzione assegnata $f(x,y)$ non è continua e non può essere resa continua da nessun numero che eventualmente venisse scritto al posto di 0 per $(x,y) = (0,0)$.

3 Derivabilità direzionale e derivabilità parziale

In $\mathcal{R}^2$ diciamo che una coppia $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ rappresenta una *direzione* se vale la relazione $(v_1)^2 + (v_2)^2 = 1$. Possiamo allora introdurre il concetto di *derivata direzionale* di una funzione $f(x,y)$ in un punto (x_0, y_0) ponendo la seguente

definizione: una funzione $f(x,y)$ si dice *derivabile nella direzione* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ nel punto (x_0, y_0) se vale

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = L \in \mathcal{R}$$

In tal caso L si dice *derivata direzionale* della f nella direzione $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ in (x_0, y_0) e poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = L$$

Nel caso in cui le direzioni siano date dalle coppie $(1,0)$ e $(0,1)$, la derivata direzionale prende il nome rispettivamente di *derivata parziale rispetto a* x e *derivata parziale rispetto a* y e in particolare si ha

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

e

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Calcoliamo ora la derivata direzionale in una generica direzione nel punto $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo il seguente limite

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2(t^2 v_1^4 + v_2^2)}\right]^2 =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t v_1^4 v_2^2}{(t^2 v_1^4 + v_2^2)^2} = 0$$

Concludiamo pertanto che la funzione data è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione. Dimostriamo però che la stessa funzione non è continua in $(0,0)$. Infatti tutti i punti della parabola $y = x^2$, rappresentati dalla scrittura (parametrica) $(x,y) = (t, t^2)$, conducono al risultato

$$f(t, t^2) = \left[\frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

Se scegliamo allora $\varepsilon = \frac{1}{10}$, non può esistere nessun intorno di $(0,0)$ tutti i punti del quale tranne $(0,0)$ stesso diano risultato distante da 0 meno di $\frac{1}{10}$ perché i punti della parabola $y = x^2$ si troveranno in tutti gli intorni dell'origine e in tali punti la funzione vale appunto $\frac{1}{4} \notin \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$. Possiamo concludere pertanto che in generale in due variabili non c'è fra continuità e derivabilità lo stesso legame che c'è fra gli stessi due concetti in una dimensione in cui vale il teorema secondo il quale se una funzione è derivabile in un punto, allora essa è nel medesimo punto anche continua. Nell'ambito delle funzioni di due variabili abbiamo trovato un esempio di funzione derivabile lungo qualsiasi direzione in un punto, ma non continua in quel punto.

Poiché nel caso di due variabili la derivabilità e la continuità non hanno dunque nessuna relazione nel senso che esistono funzioni derivabili ma non continue e funzioni continue ma non derivabili, allora per collegare la continuità ad un qualche altro concetto dobbiamo introdurre la nozione di funzione differenziabile.

4 Funzioni differenziabili

Prima di introdurre il concetto di funzione differenziabile in due variabili, esaminiamo lo stesso concetto relativamente alle funzioni di una variabile per capire per quale motivo la differenziabilità non è un concetto di grande rilevanza in una variabile. Partiremo però da questo caso per avere comunque un'indicazione su come si possa enunciare il concetto poi in due variabili.

Definizione: data una funzione reale di una variabile reale $f(x)$ definita nell'intorno di un punto x_0 e continua in x_0, la f si dice *differenziabile* in x_0 se esiste un polinomio di primo grado nella variabile x, $\mathcal{P}_1(x) = ax + b$, tale che valga

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \mathcal{P}_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{x - x_0} = 0 \tag{4}$$

Ma per funzioni di una variabile si ha che se la f è una funzione derivabile, allora il polinomio di primo grado richiesto nella (4) dalla definizione di differenziabilità esiste sempre ed è dato da

$$\mathcal{P}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0]$$

con $a = f'(x_0)$ e $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Si ha infatti, sostituendo tale polinomio nella (4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Quindi se una funzione $f(x)$ di una variabile possiede derivata $f'(x_0)$ in un punto x_0, allora si può sempre costruire il polinomio

$$\mathcal{P}_1(x) = f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0]$$

da sostituire nella (4) per avere limite pari a zero e per concludere dunque che la f è differenziabile in x_0.

Ossserviamo che il polinomio $\mathcal{P}_1(x) = f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0]$ è tale che l'equazione $y = f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0]$ è l'equazione della retta tangente nel punto x_0 alla curva di equazione $y = f(x)$.

Pertanto in una variabile se una funzione è derivabile in un punto, allora essa è automaticamente anche differenziabile nello stesso punto, ovvero il concetto di differenziabilità coincide sempre con quello di derivabilità e dunque non riveste nessun particolare interesse.

In due variabili vedremo invece che il concetto di differenziabilità, definito in modo analogo a come è stato fatto per funzioni di una variabile, non coincide affatto con quello di derivabilità.

Definizione: data una funzione reale di due variabili reali $f(x, y)$ definita nell'intorno di un punto (x_0, y_0) e continua in (x_0, y_0), la f si dice *differenziabile* in (x_0, y_0) se vale

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \mathcal{P}_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \tag{5}$$

dove $z = \mathcal{P}_1(x, y)$ è il piano scritto con la formula del piano tangente, ovvero con $\mathcal{P}_1(x, y)$ dato da

$$\mathcal{P}_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{6}$$

Quindi una funzione $f(x, y)$ si dice *differenziabile* in un punto (x_0, y_0) se, sostituita la (6) nella (5), si ha che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \tag{7}$$

vale zero.

Infine, eseguendo i cambi di variabile $h := x - x_0$ e $k := y - y_0$, possiamo riscrivere il limite della (7) nella forma

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{8}$$

e riformulare la definizione di differenziabilità ponendo la seguente

definizione: *una funzione $f(x, y)$ si dice "differenziabile" nel punto (x_0, y_0) se il limite dell'espressione nella (8) vale zero.*

Osservazione: mentre per funzioni di una variabile il limite (4) vale sempre zero se si considera il polinomio di primo grado $\mathcal{P}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (tale che $y = \mathcal{P}_1(x)$ sia l'equazione della retta tangente alla $f(x)$ nel punto x_0), per funzioni di due variabili si ha che il limite (8) non è automaticamente zero se si considera nella (5) il polinomio

$$\mathcal{P}_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

scritto con la formula del piano tangente.

L'importanza del concetto di differenziabilità risiede nel fatto che esso ci permette di enunciare il seguente teorema corrispondente ad uno analogo che vale per funzioni di una variabile.

Teorema: *se una funzione di due o più variabili a valori reali è differenziabile in un punto, allora essa è nello stesso punto anche continua e dotata di derivate direzionali lungo qualunque direzione.*

Osservazione: in una variabile si ha il teorema in virtù del quale se una funzione è derivabile in un punto, allora essa è anche continua nello stesso punto; in due e più variabili la derivabilità e la continuità non hanno nessun legame e solo l'introduzione del concetto di differenziabilità ci permette di dimostrare il teorema che lega i concetti fra loro, ovvero la differenziabilità alla continuità e alla derivabilità lungo le direzioni. Solo se una funzione f è differenziabile, allora il piano di equazione $z = \mathcal{P}_1(x, y)$, con $\mathcal{P}_1(x, y)$ come nella (6), è il piano tangente alla funzione nel punto.

Teorema: *se una funzione f di due o più variabili a valori reali possiede derivate parziali in un punto P che siano continue in un intorno di P, allora la f è differenziabile nel punto P.*

Osservazione: non va confuso il fatto che le derivate parziali in un punto siano numeri ottenuti applicando la definizione di limite del rapporto incrementale con il fatto che le derivate parziali siano funzioni continue nel punto considerato. Nell'esempio di calcolo della derivata direzionale svolto in precedenza, non ci siamo preoccupati affatto se la derivata direzionale era una funzione continua oppure no nell'origine: l'abbiamo solamente calcolata come numero nell'origine. Può quindi verificarsi che una derivata parziale esista come numero in un punto, ma che la funzione derivata parziale non sia continua nel punto. Se una derivata parziale non è continua in un punto, questo comporta che essa debba essere calcolata nel punto attraverso il limite del rapporto incrementale e non possa essere ottenuta dall'espressione funzionale valida nell'intorno del punto.

Il teorema qui sopra riportato è una condizione solo sufficiente per la differenziabilità e non vale il viceversa nel senso che una funzione potrebbe essere differenziabile in un punto senza che le sue derivate parziali siano continue nel punto stesso.

Esercizio: verificare che la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua, derivabile lungo qualunque direzione $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$, ma non differenziabile nel punto $(0,0)$. In particolare verificare che vale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)=v_1^2v_2$$

da cui segue $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

5 Estremi liberi di funzioni di tre variabili

In questo paragrafo illustreremo la procedura per stabilire la natura dei punti stazionari di una funzione $f(x,y,z)$ di tre variabili direttamente attraverso un esempio.

Un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ si dice *stazionario* per una funzione $f(x,y,z)$ se vale

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

Poiché la natura di un punto stazionario dipende dalle condizioni del secondo ordine, discutiamo brevemente le condizioni del secondo ordine di una funzione $f(x,y,z)$ mediante il suo polinomio di Taylor del secondo ordine.

Nell'intorno di un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ in cui una funzione sia continua con derivate parziali continue fino almeno all'ordine 2, la funzione stessa si approssima mediante il suo polinomio di Taylor che ha la forma

$$f(x,y,z)\approx f(P)+f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0)+f_z(P)(z-z_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\ (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P)\\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P)\\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\right]$$

Se il punto P è stazionario ($f_x(P)=f_y(P)=f_z(P)=0$), allora questa relazione prende la forma

$$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}\left[\ (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P)\\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P)\\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}\right]$$

Ricordiamo che un punto stazionario $P(x_0, y_0, z_0)$ si dice un massimo o minimo relativo per la $f(x, y, z)$ se esiste un intorno I di P tale che valga rispettivamente

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \leq 0 \quad \forall (x, y, z) \in I$$

e

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \geq 0 \quad \forall (x, y, z) \in I$$

Un punto stazionario $P(x_0, y_0, z_0)$ si dice una *sella* per la $f(x, y, z)$ se in ogni suo intorno vi sono sempre punti per i quali valga

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \leq 0$$

e punti per i quali valga

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \geq 0$$

In virtù dell'approssimazione di Taylor di una funzione in un intorno di un punto stazionario P, possiamo valutare il segno dell'espressione

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

attraverso lo studio del segno della sua approssimazione quadratica

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Per stabilire se l'espressione

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

è, al variare di (x, y, z), sempre positiva, oppure sempre negativa, oppure di segno diverso, dobbiamo studiare il comportamento della matrice

$$H(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix}$$

detta *matrice hessiana della* f, per stabilire se per ogni vettore

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$$

cioè per ogni punto di un intorno di P, la (9) fornisce risultati sempre positivi, oppure sempre negativi, oppure di segno diverso.

Immaginando di eseguire un cambiamento di base per la forma quadratica definita dalla matrice $H(P)$, il comportamento di tale matrice ai fini dello studio del segno della (9) è riconducibile al segno dei suoi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, che per un noto teorema di algebra lineare sono sempre tutti e tre reali per la simmetria della matrice (supponiamo che a riguardo valgano per la f le condizioni del teorema di Schwarz che assicura l'uguaglianza delle derivate miste!)

Abbiamo allora in particolare la seguente situazione:

- se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, allora la (9) fornisce risultati sempre positivi e il punto P è un minimo;
- se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, allora la (9) fornisce risultati sempre negativi e il punto P è un massimo;
- se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sono di segno discorde, allora la (9) fornisce risultati di segno diverso e il punto P è una sella.

Gli autovalori di una matrice di ordine 3 non si possono calcolare in generale in modo semplice perché essi si ottengono come soluzione di un'equazione algebrica di terzo grado, ma poiché quello che occorre è solo il loro segno, vediamo ora con degli esempi come si possa stabilire il segno degli autovalori senza determinare il loro valore esatto.

Esercizio 1: consideriamo la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{y^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \frac{5z^2}{2} - 2xy + 3xz + yz + x + 2y$$

I suoi punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema avente per equazioni le derivate parziali uguagliate a zero:

$$\begin{cases} f_x = & -3x - 2y + 3z + 1 & = 0 \\ f_y = & y^2 - 2x + z + 2 & = 0 \\ f_z = & -5z + 3x + y & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottengono i punti stazionari

$$P_1 = (2, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(\frac{65}{36}, -\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

Con le derivate seconde si costruisce la matrice hessiana

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & 2y & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\mathcal{P}_3(\lambda) = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 17\lambda - 1$$

Per determinare gli autovalori di $H(P_1)$ dobbiamo quindi risolvere l'equazione caratteristica

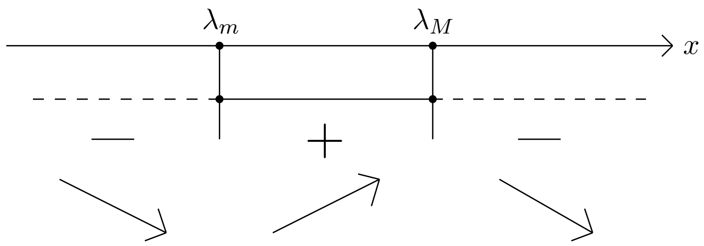
$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 - 17\lambda - 1 = 0$$

Scriviamo innanzitutto questa equazione sotto forma di sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 17\lambda - 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

in modo che studiando nel riferimento cartesiano (λ, y) il grafico della funzione $y = g(\lambda)$, avendo posto $g(\lambda) := -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 17\lambda - 1$, si possano dedurre i segni degli autovalori in base al segno delle ascisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dei tre punti di intersezione di tale grafico con l'asse λ di equazione $y = 0$. Abbiamo quindi che la $g(\lambda)$ tende all'infinito positivo e negativo rispettivamente per λ tendente a meno e a più infinito. Dall'equazione $g'(\lambda) = -3\lambda^2 - 20\lambda - 17 = 0$ ricaviamo i punti stazionari, indicati con λ_m e λ_M, della $g(\lambda)$ che, in virtù delle proprietà delle equazioni di secondo grado, hanno entrambi ascissa negativa, ovvero in particolare $\lambda_m, \lambda_M < 0$.

Dal segno di $g'(\lambda)$



si ricava che λ_m e λ_M sono rispettivamente minimo e massimo locali per la $g(\lambda)$. Poiché vale infine $g(0) = -1$ si deduce, tracciando la curva relativa alla funzione $g(\lambda)$, che tutti e tre i punti di intersezione tra tale curva e l'asse λ hanno ascissa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ negativa (figura 1).

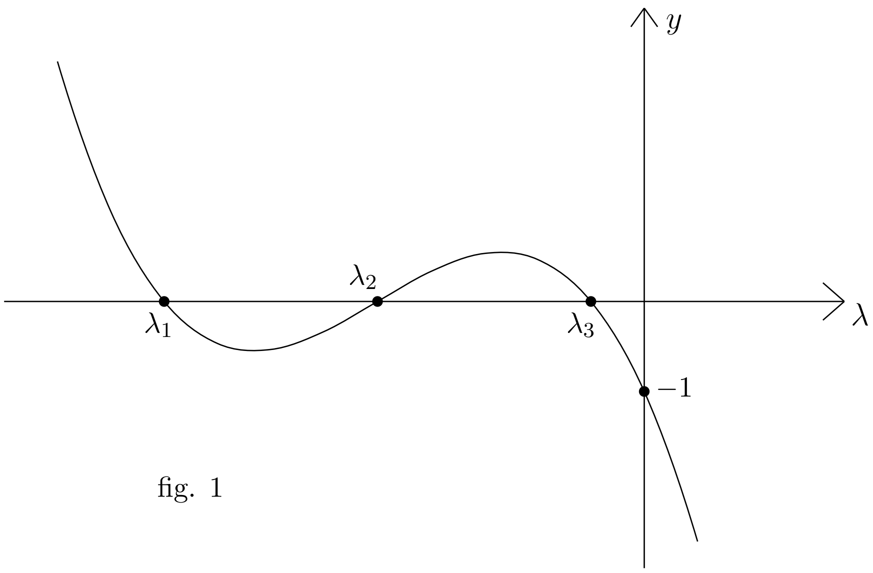


fig. 1

Poiché le ascisse di tali punti corrispondono agli autovalori della matrice $H(P_1)$, concludiamo che, essendo gli autovalori della matrice $H(P_1)$ tutti e tre negativi, il punto stazionario P_1 della $f(x, y, z)$ è un massimo.

Per stabilire ora la natura del punto stazionario

$$P_2 = \left(\frac{65}{36}, -\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

determiniamo il segno degli autovalori della matrice

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -5/3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

che si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica

$$-\lambda^3 - \frac{29}{3}\lambda^2 - \frac{43}{3}\lambda + 1 = 0$$

Anche in questo caso scriviamo questa equazione sotto forma di sistema

$$\begin{cases} y &= -\lambda^3 - \dfrac{29}{3}\lambda^2 - \dfrac{43}{3}\lambda + 1 \\ \\ y &= 0 \end{cases}$$

Ponendo

$$q(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{29}{3}\lambda^2 - \frac{43}{3}\lambda - 1$$

abbiamo all'infinito

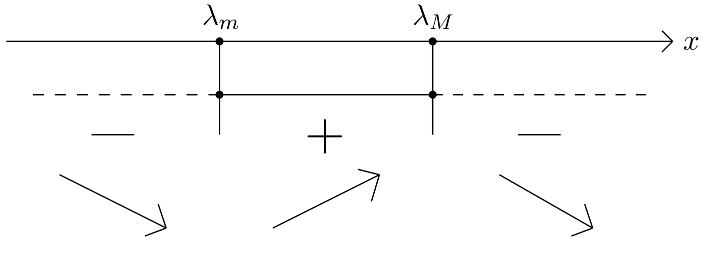
$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} q(\lambda) = \mp\infty$$

Inoltre dall'equazione

$$q'(\lambda) = -3\lambda^3 - \frac{58}{3}\lambda^2 - \frac{43}{3} = 0$$

ricaviamo i punti stazionari, indicati con λ_m e λ_M, della $q(\lambda)$ che, in virtù delle proprietà delle equazioni di secondo grado, sono entrambi negativi.

Dal segno di $q'(\lambda)$



si ricava che λ_m e λ_M sono rispettivamente minimo e massimo locali per la $q(\lambda)$. Poiché vale infine $q(0) = 1$ si deduce, tracciando la curva relativa alla funzione $q(\lambda)$, che due punti di intersezione tra tale curva e l'asse λ hanno ascissa λ_1 e λ_2 negativa mentre il terzo ha ascissa λ_3 positiva (figura 2).

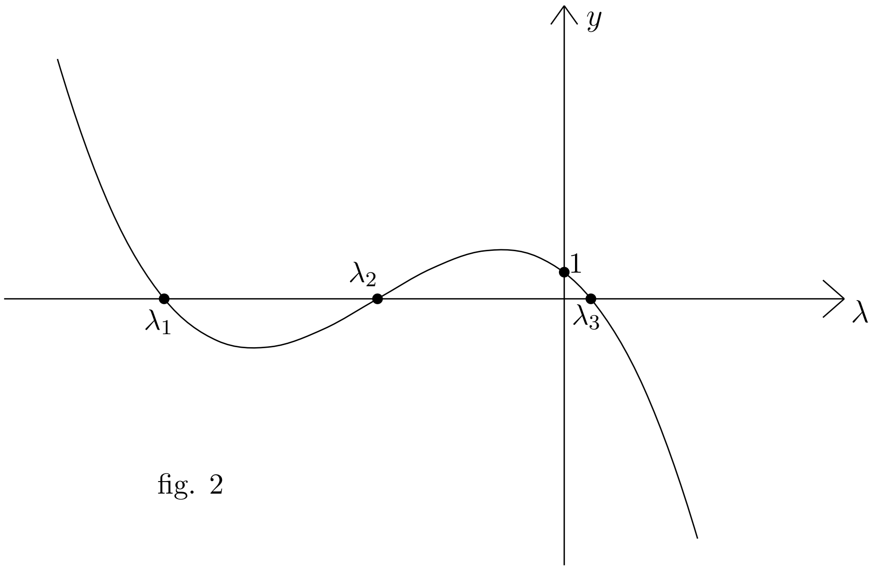


fig. 2

Poiché le ascisse di tali punti corrispondono agli autovalori della matrice $H(P_2)$, concludiamo che, essendo gli autovalori della matrice $H(P_2)$ di segno discorde, il punto stazionario P_2 della $f(x, y, z)$ è una sella.

Esercizio 2: consideriamo la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{5z^2}{2} + xy - xz - 2yz - 2x - y + \frac{z}{2}$$

Lasciando al lettore i dettagli del calcolo e lo studio dell'altro punto stazionario, indicato con P_2, ci limitiamo a studiare la natura del punto stazionario

$$P_1 = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

La matrice hessiana in corrispondenza di tale punto stazionario è

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica è

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 17\lambda + 1 = 0$$

Scriviamo questa equazione sotto forma di sistema equivalente

$$\begin{cases} y &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 17\lambda + 1 \\ y &= 0 \end{cases}$$

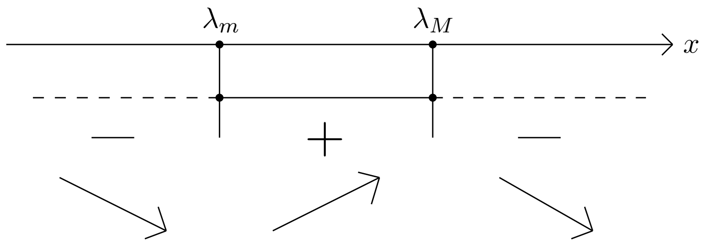
e, come in precedenza, studiamo il grafico della funzione $y = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 17\lambda + 1$.

Ponendo $g(\lambda) := -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 17\lambda + 1$, abbiamo all'infinito

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} g(\lambda) = \mp\infty$$

Dall'equazione $g'(\lambda) = 3\lambda^2 - 18\lambda + 17 = 0$ ricaviamo i punti stazionari, indicati con λ_m e λ_M, della $g(\lambda)$ che, in virtù delle proprietà delle equazioni di secondo grado, sono entrambi positivi.

Dal segno di $g'(\lambda)$



si ricava che λ_M e λ_m sono rispettivamente massimo e minimo locali per la $g(\lambda)$. Poiché vale infine $g(0) = 1$ si deduce, tracciando la curva relativa alla funzione $g(\lambda)$, che tutti e tre i punti di intersezione tra tale curva e l'asse λ hanno ascissa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positiva (figura 3).

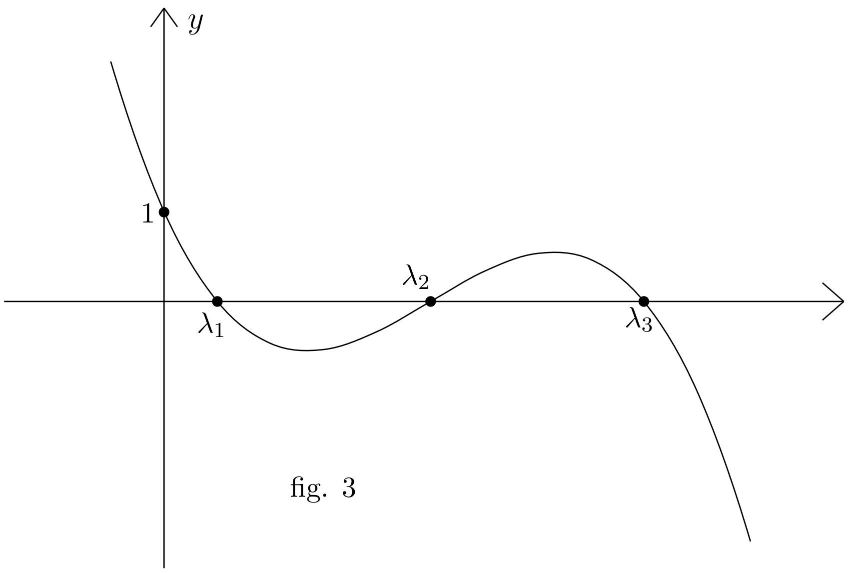


fig. 3

Poiché le ascisse di tali punti corrispondono agli autovalori della matrice $H(P_1)$, concludiamo che, essendo gli autovalori della matrice $H(P_1)$ tutti e tre positivi, il punto stazionario P_1 della $f(x,y,z)$ è un minimo.

Teorema (regola pratica): utilizzando il metodo grafico, possiamo dimostrare in generale che gli autovalori di una matrice sono

- concordi negativi se il polinomio caratteristico possiede tutti i coefficienti con il medesimo segno;
- concordi positivi se il polinomio caratteristico possiede tutti i coefficienti con il segno alternato;
- discordi se i coefficienti del polinomio caratteristico non verificano nessuna delle due condizioni precedenti.

Esercizio da svolgere: determinare i punti stazionari della seguente funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{2} - y^2 - \frac{5z^2}{2} - 2xy + 3xz + yz - \frac{5x}{2} - y + 7z$$

e stabilirne la natura

6 Estremi vincolati di funzioni di tre variabili con vincoli "rigidi" di uguaglianza

Si rimanda ai testi di riferimento per un quadro teorico del problema e risolviamo alcuni esercizi per illustrare il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*.

Per determinare gli estremi vincolati di una data una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ soggetta a p vincoli

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

con $p < n$, costruiamo la *funzione lagrangiana* del problema

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$

$$+\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_p\varphi_p(x_1, x_2, ..., x_n)$$

dove i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ vengono denominati *moltiplicatori di Lagrange*.

Un punto $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n; \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, ..., \bar{\lambda}_p)$ è un punto di estremo per la funzione assegnata $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ se la $n{+}p{-}pla$ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n; \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, ..., \bar{\lambda}_p$ è una soluzione del sistema di $n+p$ equazioni

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x_1 & = & 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial x_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ \partial\mathcal{L}/\partial x_n & = & 0 \\ \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) & = & 0 \\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \varphi_p(x_1,x_2,...,x_n) & = & 0 \end{cases}$$

Per stabilire la *natura* del punto A si studia la matrice hessiana orlata, indicata con il simbolo $\bar{H}(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_p)$, di ordine $n+p$, avente la struttura data da

$$\bar{H}(x_i;\lambda_j) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial\varphi_1/\partial x_1 & \cdots & \partial\varphi_1/\partial x_n \\ 0 & \cdots & 0 & \partial\varphi_2/\partial x_1 & \cdots & \partial\varphi_2/\partial x_n \\ . & & . & . & & . \\ 0 & \cdots & 0 & \partial\varphi_p/\partial x_1 & \cdots & \partial\varphi_p/\partial x_n \\ \partial\varphi_1/\partial x_1 & \cdots & \partial\varphi_p/\partial x_1 & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_1\partial x_1 & \cdots & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_1\partial x_n \\ \partial\varphi_1/\partial x_2 & \cdots & \partial\varphi_p/\partial x_2 & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_2\partial x_1 & \cdots & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_2\partial x_n \\ . & & . & . & & . \\ \partial\varphi_1/\partial x_n & \cdots & \partial\varphi_p/\partial x_n & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_n\partial x_1 & \cdots & \partial^2\mathcal{L}/\partial x_n\partial x_n \end{pmatrix}$$

Indicando con $\bar{H}_h$ il *minore principale dominante di ordine h* della matrice hessiana orlata $\bar{H}$ (ovvero quel minore costituito dalle prime h righe e dalle prime h colonne di $\bar{H}$), possiamo enunciare (senza dimostrazione) il criterio mediante il quale si stabilisce se il punto di estremo A trovato è un massimo o un minimo.

Sia ora $\bar{H}$ la matrice hessiana orlata calcolata in corrispondenza del punto di estremo A trovato: si ha che se per ogni $k = 1,2,...,n-p$

- vale $(-1)^{p+k}\det\bar{H}_{2p+k} > 0$, allora il punto A è un *massimo* della funzione f sull'insieme individuato dai vincoli;
- vale $(-1)^{p}\det\bar{H}_{2p+k} > 0$, allora il punto A è un *minimo* della funzione f sull'insieme individuato dai vincoli.

Vediamo ora degli esempi di determinazione di punti di massimo e minimo nei casi di funzione di tre variabili soggetta ad un vincolo e a due vincoli.

Esempio 1: vogliamo trovare gli estremi della funzione

$$f(x,y,z) = 5x - 3y - 3z$$

soggetti al vincolo

$$x^2 - y^2 - z^2 - 7 = 0$$

Dalla *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(x, y, z;\ \lambda) = 5x - 3y - 3z + \lambda(x^2 - y^2 - z^2 - 7)$$

otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = & 5 + 2\lambda x & = 0 \\ \mathcal{L}_y = & -3 - 2\lambda y & = 0 \\ \mathcal{L}_z = & -3 - 2\lambda z & = 0 \\ & x^2 - y^2 - z^2 & = 7 \end{cases}$$

Con semplici passaggi algebrici risolviamo il sistema e troviamo quindi i due punti di estremo (con le variabili scritte nell'ordine $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\,;\ \bar{\lambda}$)

$$A = \left(5, 3, 3; -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad B = \left(-5, -3, -3; \frac{1}{2}\right)$$

Essendo in questo caso $n = 3$ (tre variabili) e $p = 1$ (un solo vincolo), la matrice hessiana orlata di questo problema ha ordine 4 e assume la forma

$$\bar{H}(x, y, z\,;\ \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & -2y & -2z \\ 2x & 2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

In questo caso lo studio dei minori principali dominanti della matrice hessiana orlata si esegue per $k = 1; 2$ perché si ha $n - p = 2$ e dunque segue che un punto di estremo della $f(x, y, z)$ sul vincolo è un massimo se

$$\det \bar{H}_4 < 0 \qquad \text{e} \qquad \det \bar{H}_3 > 0$$

mentre è un minimo se

$$\det \bar{H}_4 < 0 \qquad \text{e} \qquad \det \bar{H}_3 < 0$$

Costruiamo allora la matrice hessiana orlata relativa al punto A

$$\bar{H}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 & -6 \\ 10 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché risulta

$$\det \bar{H}_4(A) = \det \bar{H}(A) = -28 < 0$$

e

$$\det \bar{H}_3(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 \\ 10 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -64 < 0$$

allora concludiamo che il punto A è un punto di minimo.

Costruiamo quindi la matrice hessiana orlata relativa al punto B

$$\bar{H}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 & 6 \\ -10 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché risulta

$$\det \bar{H}_4(B) = \det \bar{H}(B) = -28 < 0$$

e

$$\det \bar{H}_3(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ -10 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 64 > 0$$

allora concludiamo che il punto A è un punto di massimo.

Esempio 2: vogliamo trovare gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + z$$

soggetti ai vincoli

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y + z = 0$$

Dalla *lagrangiana* (contenente in questo caso due *moltiplicatori di Lagrange*)

$$\mathcal{L}(x, y, z;\ \lambda, \mu) = 2x + 3y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$$

otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = & 2 + 2\lambda x + \mu & = 0 \\ \mathcal{L}_y = & 3 + 2\lambda y + \mu & = 0 \\ \mathcal{L}_z = & 1 + 2\lambda z + \mu & = 0 \\ & x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ & x + y + z & = 0 \end{cases}$$

Con semplici passaggi algebrici risolviamo il sistema e troviamo quindi i due punti di estremo (con le variabili scritte nell'ordine $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\,;\ \bar{\lambda}, \bar{\mu}$)

$$A = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right) \qquad \text{e} \qquad B = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$$

Essendo in questo caso $n = 3$ (tre variabili) e $p = 2$ (due vincoli), la matrice hessiana orlata di questo problema ha ordine 5 e assume la forma

$$\bar{H}(x, y, z\,;\,\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 1 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 2z & 1 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

In questo caso lo studio dei minori principali dominanti della matrice hessiana orlata si esegue solo per $k = 1$ perché si ha $n - p = 1$ e dunque segue che un punto di estremo della $f(x, y, z)$ sul vincolo è un massimo se

$$\det \bar{H}_5 < 0$$

mentre è un minimo se

$$\det \bar{H}_5 > 0$$

Costruiamo allora la matrice hessiana orlata relativa al punto A

$$\bar{H}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Poiché risulta

$$\det \bar{H}_5(A) = \det \bar{H}(A) = 12\sqrt{2} > 0$$

allora concludiamo che il punto A è un punto di minimo.

Costruiamo quindi la matrice hessiana orlata relativa al punto B

$$\bar{H}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Poiché risulta

$$\det \bar{H}_5(B) = \det \bar{H}(B) = -12\sqrt{2} < 0$$

allora concludiamo che il punto B è un punto di massimo.

Riferimenti bibliografici

1. Alessandro Blasi, *Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie*, Ed. Kappa, 1998;

2. Alessandro Blasi, *Matematica - Corso base per la Facoltà di Economia*, Ed. Kappa, 2001