

Compito di MATEMATICA CORSO BASE del giorno _____

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Esercizio 1 (6 punti). Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 5z + 4 + 3x = 2y - kz \\ -k + y = 1 - z + x \\ 1 + z + ky = -7x + k + y \end{cases}$$

Al variare del parametro k , determinare il rango delle matrici A e B , il numero delle soluzioni (x, y, z) e le soluzioni (x, y, z) esplicite (lasciando in bianco eventuali caselle che NON occorrono)

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq -4 \text{ e } k \neq -10 \\ 2 & \text{per } k = -4 \\ 2 & \text{per } k = -10 \end{cases}, \quad \operatorname{rg}(B) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq -4 \text{ e } k \neq -10 \\ 2 & \text{per } k = -4 \\ 3 & \text{per } k = -10 \end{cases}$$

$$\text{Il numero delle soluzioni è } \begin{cases} \text{soluzione unica} & \text{per } k \neq -4 \text{ e } k \neq -10 \\ \infty^1 \text{ soluzioni} & \text{per } k = -4 \\ \text{nessuna soluzione} & \text{per } k = -10 \end{cases}$$

$$\text{Le soluzioni sono } \begin{cases} \text{per } k \neq -4 \text{ e } k \neq -10 \\ x = \frac{1 - k^2}{k + 10} \\ y = \frac{8k + 14}{k + 10} \\ z = \frac{3k - 3}{k + 10} \end{cases}, \begin{cases} \text{per } k = -4 \\ x = t \\ y = \frac{4t + 1}{3} \\ z = -\frac{t + 10}{3} \end{cases}, \begin{cases} \text{per } k = -10 \\ x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Esercizio 2 (12 punti). Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{(3x - 5 + 2x^2)(6 + 2x^2 - 7x)}{30(2x - 1)^4}$$

determinare:

il dominio $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

i punti di intersezione con gli assi cartesiani $A(-5/2, 0), B(1, 0), C(3/2, 0), D(2, 0), E(0, -1)$

i limiti fondamentali $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1/120, \quad \lim_{x \rightarrow 1/2^\pm} f(x) = -\infty$

le equazioni cartesiane degli asintoti $y = 1/120, \quad x = 1/2$

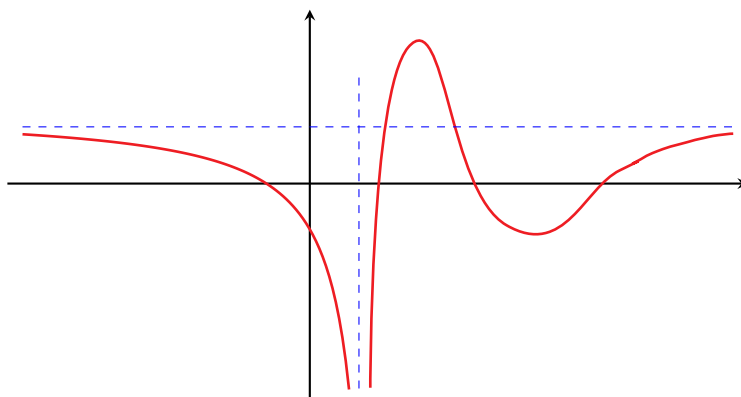
l'espressione $f'(x)$ della derivata prima $f'(x) = \frac{100x^2 - 280x + 187}{30(2x - 1)^5}$

le ascisse x dei punti di massimo e minimo locali $x = 11/10$ (max), $x = 17/10$ (min)

l'espressione $f''(x)$ della derivata seconda $f''(x) = \frac{-20x^2 + 68x - 53}{(2x - 1)^6}$

le ascisse x dei punti di flesso $x_1 = \frac{17}{10} - \frac{\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{17}{10} + \frac{\sqrt{6}}{5}$

il grafico qualitativo (**disegnare la curva senza numeri e riportando solo gli eventuali asintoti**)



Esercizio 3 (4 punti). Data la seguente funzione $f(x)$, determinare la sua primitiva $F(x)$ e il suo integrale definito I tra gli estremi $a = 2$ e $b = 6$

$$f(x) = \frac{x}{2\sqrt{1+4x}+3x}$$

Soluzione: $F(x) = \frac{4x+1}{12} - \frac{4\sqrt{4x+1}}{9} + \frac{6}{5} \log(3+\sqrt{4x+1}) - \frac{2}{135} \log|3\sqrt{4x+1}-1| + k$

$$I = \frac{4}{9} + \frac{6}{5} \log(4/3) + \frac{1}{135} \log(4/7)$$

Esercizio 4 (4 punti). Stabilire se la funzione

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 2}{40(3x - 2)^2}$$

soddisfa le ipotesi del **teorema sulla formula di Taylor** relativamente ai punti $x_0 = 1$ e $x = 2$.

In caso affermativo scrivere la formula di Taylor associata alla funzione $g(x)$ nei punti dati e contenente il polinomio di Taylor sviluppato fino all'ordine $n = 2$, determinando quindi i punti c della tesi del teorema.

Soluzione: Formula di Taylor: $\frac{1}{(3c-2)^5} = \frac{13}{64} \quad c = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt[5]{\frac{64}{13}}$

Compito di MATEMATICA CORSO BASE del giorno _____

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Esercizio 1 (6 punti). Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} -z - 2k + 3y = 1 - 2x \\ -5y - 2 + kx = 3z + k + 5x \\ ky - 3 = -4y - 2z - 3x \end{cases}$$

Al variare del parametro k , determinare il rango delle matrici A e B , il numero delle soluzioni (x, y, z) e le soluzioni (x, y, z) esplicite (lasciando in bianco eventuali caselle che NON occorrano)

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} \text{per } k \\ \text{per } k \\ \text{per } k \end{cases}, \operatorname{rg}(B) = \begin{cases} \text{per } k \\ \text{per } k \\ \text{per } k \end{cases}$$

$$\text{Il numero delle soluzioni è } \begin{cases} \text{per } k \\ \text{per } k \\ \text{per } k \end{cases}$$

$$\text{Le soluzioni sono } \begin{cases} \text{per } k \\ x = \\ y = \\ z = \end{cases}, \begin{cases} \text{per } k \\ x = \\ y = \\ z = \end{cases}, \begin{cases} \text{per } k \\ x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Esercizio 2 (12 punti). Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{(-7x - 3 - 2x^2)(1 - 2x)}{24(4x + 1)^3}$$

determinare:

dominio _____

intersezioni con gli assi cartesiani _____

limiti fondamentali _____

equazioni cartesiane degli asintoti _____

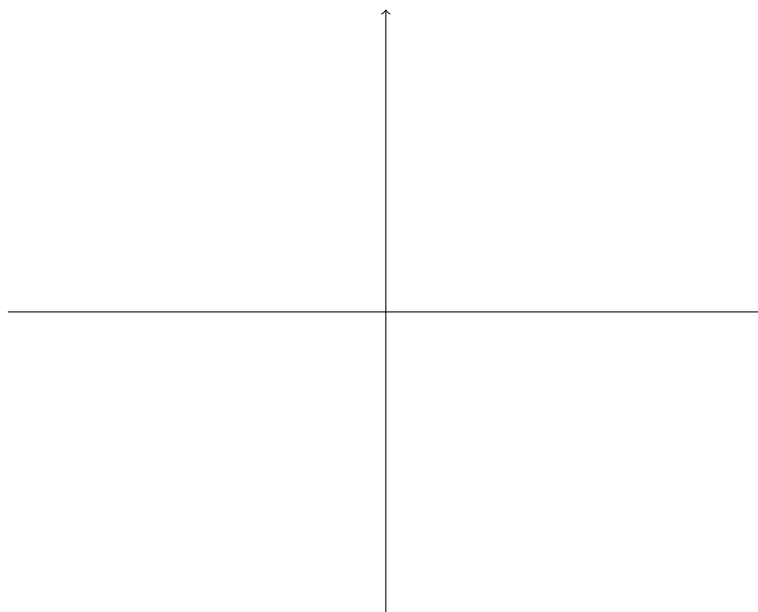
espressione $f'(x)$ della derivata prima _____

ascisse x dei punti di massimo e minimo locali _____

espressione $f''(x)$ della derivata seconda _____

ascisse x dei punti di flesso _____

grafico qualitativo (**disegnare la curva senza numeri e riportando solo gli eventuali asintoti**)



Esercizio 3 (4 punti). Data la seguente funzione $f(x)$, determinare la sua primitiva $F(x)$ e il suo integrale definito I tra gli estremi $a = 2$ e $b = 6$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{4x+1} + 3x}$$

Soluzione: $F(x) =$ $I =$

Esercizio 4 (4 punti). Stabilire se le due funzioni

$$f(x) = \frac{3}{2x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x}{3x+1}$$

soddisfano le ipotesi del **teorema di Cauchy** relativamente all'intervallo $[1, 2]$. In caso affermativo, scrivere l'equazione di Cauchy e determinare quindi i punti c di cui alla tesi del teorema.

Soluzione: Equazione di Cauchy: $\left(\frac{3c+1}{2c-1}\right)^2 = \frac{28}{3}$ $c = \frac{\sqrt{28} + \sqrt{3}}{2\sqrt{28} - \sqrt{27}}$